Σημειώσεις

ΟΡΙΣΜΟΣ 187 b

Έστω $q: \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ τετραγωνική μορφή και A = πίνακας$(q) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Έστω $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ο ορθογώνιος πίνακας του Παρ. 187 με $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ όπου λ οι ιδιοτιμές του A. Έστω $g_i \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ η i-στήλη του P (Αφού P ορθογ. $g_1, g_2, \dots, g_n$ είναι ορθ. βάση του $\mathbb{R}^{n\times 1}$) Λέμε ότι (i) Οι κύριοι άξονες της q είναι το σύνολο $\{\langle g_1\rangle, \dots, \langle g_n\rangle\}$ (που αποτελείται από n το πλήθος 1-διάστατους υπόχωρους του $\mathbb{R}^{n\times 1}$

(ii) Αναγωγή της q στους κύριους άξονες της ονομάζουμε την τετραγωνική μορφή $q^e: \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ με $q^e((\;)) = \lambda_1 z_1^2 + \dots \lambda_n z_n^2$

Παράδειγμα 187 c

Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $q: \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}$ με $q(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = 5x^2 + 8xy + 5y^2$ στο $\mathbb{R}^2$. Να βρεθούν οι κύριοι άξονες της. Επίσης να αναχθεί η q ως προς τους κύριους άξονες της.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε A = πίνακας (q) $\quad A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Έχουμε $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 5-x & 4 \\ 4 & 5-x \end{vmatrix} = (x-1)(x-9)$ μετά τις πράξεις

Άρα ο A έχει ιδιοτιμές $x_1 = 1$, $x_2 = 9$

Υπολογισμός ιδιοχώρων $V_A(1) = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} \; A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \}$.

Μετά τις πράξεις βρίσκουμε $V_A(1) = \{ \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} \in \mathbb{R} \}$ έχει ορθοκανονική βάση

$g_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$V_A(9) = \{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} \; A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 9\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \}$ Μετά τις πράξεις βρίσκουμε

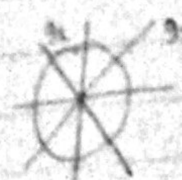
$V_A(9) = \{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \}$ Έχει ορθοκανονική βάση $g_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ Επομένως οι 2

κύριοι άξονες της q είναι $\langle g_1\rangle = \{ a \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \; a \in \mathbb{R} \}$

$\langle g_2\rangle = \{ a \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \; a \in \mathbb{R} \}$

Η αναγωγή από q ως προς τους κυρίους άξονες είναι τετραγωνική μορφή $q': \mathbb{R}^{2\times1} \to \mathbb{R}$ με $q'\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2\end{pmatrix}\right) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = 1z_1^2 + 9z_2^2$

Γεωμ. ερμηνεία $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : q(x,y)=1\}$



Θέτουμε $P = [q_1|q_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

Αλλαγή μεταβλητής $\begin{bmatrix} z_1\\ z_2\end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = P^t \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}(x-y)\\ 1/\sqrt{2}(x+y)\end{bmatrix}$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ $q\left(\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right) = q'\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}(x-y)\\ 1/\sqrt{2}(x+y)\end{pmatrix} = 1\left(1/\sqrt{2}(x-y)\right)^2 + 9\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)\right)^2$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 188

Έστω $\lambda_i \in \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R}^{n\times1}\to\mathbb{R}$ η τετραγωνική μορφή $g\left(\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}\right) = \lambda_1 z_1^2 + \dots + z_n^2\lambda_n$

Ορίζουμε $P'' = \begin{bmatrix}\mu_1 & & 0\\ & \mu_2 & \\ 0 & & \mu_n\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμο ως εξής $\mu_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } \lambda_i = 0\\ 1/\sqrt{\lambda_i} & \text{αν } \lambda_i>0 \\ 1/\sqrt{-\lambda_i} & \text{αν } \lambda_i<0\end{cases}$

Τότε $(P'')^t \begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix} P'' =$

$\begin{bmatrix}\kappa_1 & & 0\\ & \kappa_2 & \\ 0 & & \kappa_n\end{bmatrix}$ με $\kappa_i \in \{1,-1,0\}$. Επομένως, αν θέσουμε $q'': \mathbb{R}^{n\times1}\to\mathbb{R}$ με $q''\left(\begin{pmatrix}z_1''\\ \vdots \\ z_n''\end{pmatrix}\right) = q\left(P''\begin{pmatrix}z_1''\\ z_n''\end{pmatrix}\right)$ έχουμε $q''\left(\begin{pmatrix}z_1''\\ z_n''\end{pmatrix}\right) =$

$\kappa_1(z_1'')^2 + \kappa_2(z_2'')^2 + \dots + \kappa_n(z_n'')^2$ για κάθε $\begin{pmatrix}z_1''\\ z_n''\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times1}$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

<u>Α μορφή</u>: Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός, τότε υπάρχει διαγώνιος πίνακας B με στοιχεία στη διαγώνιο $1, 0, -1$ και $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος ώστε $P^tAP = B$

<u>Β μορφή</u>: Έστω $q: \mathbb{R}^{n\times1}\to\mathbb{R}$ τετραγωνική μορφή τότε να είναι ισόμορφη με μια τετραγωνική μορφή $q'': \mathbb{R}^{n\times1}\to\mathbb{R}$ με $q''\left(\begin{pmatrix}z_1''\\ \vdots\\ z_n''\end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i (z_i'')^2$ με

ΟΡΙΣΜΟΣ 189

Έστω $q: \mathbb{R}^{n\times1}\to\mathbb{R}$ τετραγωνική μορφή στο $\mathbb{R}^n$ και A = πίνακας (q). Ορίζουμε τάξη, rank(q) ως εξής rank(q) = rank(A) ...

Ορίζουμε δείκτης q είναι ο αριθμός θετικών ιδιοτιμών του A.
Ορίζουμε υπογραφή της q $\text{sign}(q) = \mathfrak{I}(q) - \text{rank}(q)$ (Σ)
(αριθμός θετικών ιδιοτιμών του A) - (αριθμός αρ. ιδιοτιμών του A)
Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ιδιοτιμές του A (ξέρουμε $\lambda_i \in \mathbb{R}$ και A διαγωνιοποιείται στο $\mathbb{R}$ αφού A συμμετρικός). Τότε A όμοιος με τον $B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$
Από θρ. I A και B έχουν την ίδια βαθμίδα
Αφού B διαγώνιος βαθμίδα(B) = αριθμός των λ που είναι $\neq 0$
Άρα rank(q) = αριθμός των λ που είναι $\neq 0$

$= i(q) + (\text{αριθμός αρνητικών } \lambda_i)$. Σαν συνέπεια, η ισότητα (Σ)
έπεται γιατί $\mathfrak{I}(q) - \text{rank}(q) = \mathfrak{I}(q) - (i(q) + \text{αριθμός αρνητικών } \lambda_i) =$
$i(q) - (\text{αρνητικών } \lambda_i)$

Όμοιως ορίζουμε δείκτη $i(A)$ και υπογραφή $\text{sign}(A)$ για $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικό. ΠΑΡΑΔ $A = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ 0 & & & 4 \end{bmatrix}$ βαθμίδα(A) = 4

$i(q) = 3$ $\text{sign}(A) = 2$. Επίσης, αν $q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = 2x_1x_2$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
συμμετρικός με ιδιοτιμές $1, -1, 0$
Άρα $\text{rk}(q) = 2$
γιατί $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x(x^2 - 1)$ Άρα $\text{rank}(q) = 2$ $i(q) = 1$
$\text{sign}(q) = 0$

Συνδυάζοντας την Παρατήρηση 188 με μια αντιστρεπτή μεταβλητή
δοθέντος $q: \mathbb{R}^{n \times 1} \to \mathbb{R}$ τετραγωνική μορφή, υπάρχει ισόμορφη $q': \mathbb{R}^{n \times 1} \to \mathbb{R}$
τετραγωνική μορφή ώστε $q'\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right) = (z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_{i(q)}^2) - (z_{i(q)+1}^2 + \ldots + z_{\text{rank}}^2)$

ΘΕΩΡΗΜΑ 190 (Sylvester)
Έστω $q, q': \mathbb{R}^{n \times 1} \to \mathbb{R}$ δύο τετραγωνικές μορφές
α) Αν q, q' ισόμορφες τότε έχουν ίδια βαθμίδα (από θρ. I), ίδιο δείκτη και ίδια υπογραφή
β) Αντίστροφα αν οι q, q' έχουν ίσες βαθμίδες και ίσους δείκτες (ισοδύναμα ίσες βαθμίδες και ίσες υπογραφές) τότε είναι ισόμορφες

ΑΠΟΔ α) Χωρίς απόδ. β) Από την προηγούμενη παρατήρηση

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 101

Εστω $q, q': \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}$ με $q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ $q'\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$

Φανερά $\text{rank}(q) = \text{rank}(q') = 3$ $i(q) = 3 \neq i(q') = 2$ Άρα από θεώρημα Sylvester q και q' όχι ισόμορφα

ΟΡΙΣΜΟΣ 102

Εστω $q: \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ τετραγωνική μορφή στο $\mathbb{R}^n$

(i) Η q λέγεται θετικά ορισμένη αν $q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}\right) > 0$ για κάθε $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ μη μηδενικό. Τότε λέμε και ότι ο A είναι θετικά ορισμένος

(ii) Η q λέγεται αρνητικά ορισμένη αν $q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}\right) < 0$ για κάθε $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ μη μηδενικό. Τότε λέμε ότι και ο

συμμετρικός πίνακας A είναι αρνητικά ορισμένος

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Εύκολα βλέπουμε αν $q: \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ τετρ. μορφή τότε Τ.Α.Ε.Ι.

(i) q θετικά ορισμένη

(ii) Κάθε ιδιοτιμή του πίνακα(q) είναι θετική

(iii) $\text{rank}(q) = i(q) = n$

(iv) Η q είναι ισόμορφη με την $q'\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$

Όμοια q αρνητικά ορισμένη $\Leftrightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα(q) αρνητικές $\Leftrightarrow$ $\text{rank}(q) = n$, $i(q) = 0 \Leftrightarrow$ q ισόμορφη με την $q'\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \end{pmatrix}\right) = -z_1^2 - z_2^2 - \dots - z_n^2$